Anzahl von Primzahlen der Form m^2+1

Abstract: A new proof is given for the existence of infinitely many prime numbers of the forms $p=m^2+1$ and $p=4m^2+1$.

1. Vorbemerkung

Satz 1. Es ist $m=1$ die einzige natürliche ungerade Zahl, für die gilt $k=m^2+1$ ist Primzahl.

Bew.: Für $m=1$ ist $k=m^2+1=2$ eine Primzahl. Für jede ungerade natürliche Zahl $m>1$ ist auch $m^2\geq 9$ eine ungerade natürliche Zahl, also $k=m^2+1\geq 10$ stets geradzahlig, also echt teilbar durch 2, d.h. nicht Primzahl; **q.e.d.**

Wegen Satz 1 können Primzahlen der Form $k=m^2+1=(2n)^2+1=4n^2+1>2$ mit natürlichen Zahlen $m=2n$ geradzahlig angesetzt werden. Alle solchen Zahlen k sind ungerade wie auch alle Primzahlen >2.

Satz 2. Wenn es unendlich viele Primzahlen der Form $p=4n^2+1$ gibt, dann gibt es auch unendlich viele Primzahlen der Form $p=n^2+1$ und umgekehrt.

Bew.: Die Transformation $m=2n$ bzw. $n=\frac{m}{2}$ wählt aus den natürlichen Zahlen für m die geraden Zahlen $m\geq 2$ aus, die allein auf ungerade Zahlen k, zu denen alle Primzahlen >2 gehören, führen können; **q.e.d.**

Die Unendlichkeit dieser Mengen bleibet noch zu zeigen.

Es haben also alle ungeraden Primzahlen der Form $k=m^2+1$ mit $m>1$ eine Darstellung $k=(2n)^2+1=4n^2+1$, sofern m als natürliche Zahl vorausgesetzt wird.

Werden dagegen nicht m, sondern nur m^2 und k als natürliche Zahl vorausgesetzt, so gibt es weitere natürliche Quadratzahlen, die ungerade natürliche Zahlen liefern, etwa $k=(\sqrt{2}^l m)^2+1=2^l m^2+1$ mit ungeradem l, die Primzahlen oder teilbare Zahlen sein können: z.B. sind $k=2^3\cdot 5+1=41$, $k=2^3\cdot 11+1=89$, $k=2^5\cdot 3+1=97$ Primzahlen und $k=2^3\cdot 3+1=5^2$, $k=2^3\cdot 7+1=3\cdot 19$ teilbar.

2. Problemstellung

H.Scheid erwähnt in seinem Standardwerk [1] , daß es (bis etwa 1990) noch ungeklärt war, ob unendlich viele Primzahlen der Formen $p=m^2+1$ und $p=4n^2+1$ existieren. Mit seinem heuristisch-statistischen Ansatz für die Anzahl A von Primzahlen der Form n^2+1 unterhalb der Schranke x $A=\sum_{n^2+1\leq x}\frac{1}{ln(n^2+1)}\approx\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{D}{2\cdot ln(n)}\approx\frac{D}{2}\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}=D\sqrt{x}/ln(x)$, worin

$$D=\prod_{p\geq 3}\frac{1-\frac{\left(\frac{-1}{p}\right)+1}{p}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)}=\prod_{p\geq 3}\left(1-\frac{\left(\frac{-1}{p}\right)}{p-1}\right)\approx 1,37281346\ldots$$

unter Verwendung der Legendre-Symbole $\left(\frac{-1}{p}\right)$ die Wahrscheinlichkeit w_s beschreibt, daß n^2+1 durch eine der Primzahlen $p>2$ teilbar ist, erhält er plausible Werte A=N, die nur $12\cdots 17\%$ für wachsende x zu niedrig liegen, s. Tab. 1. Es ist $w_s=0$ für $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$ und $w_s=\frac{2}{p}$ für $\left(\frac{-1}{p}\right)=+1$. Die genaue Anzahl A=N gibt er nach [2] in Tab. 1 wieder:

x	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}
G	112	841	6656	54110	456362
N	99	745	5962	49683	425860

Tab. 1

In [3] wird eine exakte Begründung für die oben angenommene Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben, woraus auf das Verhalten von A für $x\to\infty$ geschlossen werden darf. Es ist lediglich der Wert obiger Konstante D geringfügig zu modifizieren.

3. Anzahl von Primzahlen der Form $4n^2+1$

Die Anzahl $\pi(\eta_n)$ von Primzahlen in einem beliebigen Quadratintervall $\eta_n = (n^2,(n+1)^2]$ wird in [3] angegeben als $\pi(\eta_n) = A'\frac{x}{lnx}$, worin $A' \approx 1,06 < ln3 = 1,098\cdots$ eine Konstante und $p_{i_0}^2 \lesssim (n+1)^2 = x$ die obere Schranke der betrachteten Zahlen bezeichnen. Es ist 2n+1 die Breite von η_n und $2 \cdot lnp_{i_0} \approx ln(n+1)^2 = lnx$, sodaß für das größere Intervall (1,x] die Anzahl darin enthaltener Primzahlen $\pi(x) = A'\frac{x}{lnx}$ ergibt in Übereinstimmung mit der Formel von Gauß und Legendre.

Für das Quadratintervall η_n ist die Intervallbreite $b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$und die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl Primzahlen $w = \frac{\pi(\eta_n)}{b_n} = \frac{A'}{2ln(n+1)} = \frac{A'}{lnx}$ mit $x \epsilon \eta_n$. (Die Gaußformel $\pi(x) = \frac{b_n}{lnx}$ mit $b_n = x$ liefert Werte, die um $5\cdots 10\%$ zu niedrig liegen, der Faktor ln3 steigerte sie um fast 10%, sodaß ein etwas kleinerer Wert anzunehmen ist.) Nach [3] ergibt sich für die streuende Anzahl Primzahlen im Intervall

$$\pi_s(x) = \frac{A'b_n}{lnx}\left(1 \pm \frac{2A'}{lnx}\right).$$

Für die Anzahl von Primzahlen der Form $k = 4n^2+1$ ist nun darin 1) die Wahrscheinlichkeit $w = \frac{\pi_s(4n^2+1)}{\sqrt{4n^2+1}}D$ mit dem Produkt D aller Wahrscheinlichkeiten , daß $4n^2+1$ durch eine der ungeraden Primzahlen teilbar ist, zu multiplizieren und 2) $b_n = \sqrt{x}$ einzusetzen:

$$\pi_s(x) = \frac{DA'\sqrt{x}}{\ln x}\left(1 \pm \frac{2A'}{\ln x}\right) \tag{1}$$

mit D=1,37281346$\cdots$, $A' \approx 1,06$. Diese Gleichung liefert als wahrscheinlichsten oder Mittelwert (Streuung $S = \pm\frac{2A'}{\ln x} = 0$ gesetzt) $M = \pi_s(x)$, als Oberschranke $O = \pi_{s+}(x) = \frac{DA'\sqrt{x}}{\ln x}\left(1+\frac{2A'}{\ln x}\right)$ und als Unterschranke $U = \pi_{s-}(x) = \frac{DA'\sqrt{x}}{\ln x}\left(1-\frac{2A'}{\ln x}\right)$, die anstelle von N in Tab.1 jetzt in Tab. 2 stehen:

x	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}
G	112	841	6656	54110	456362
O	121,5	880,9	6901,6	56705,5	453867,5
M	105,3	790,0	6319,8	52664,8	425860,9
U	89,2	699,1	5737,9	48624,1	397854,3

Tab. 2

Die Übereinstimmung kann als befriedigend angesehen werden. Lediglich in der letzten Spalte liegt der Wert für O um 0,55% zu tief, was auf den nicht genügend genau ermittelten Wert von A' zurückzuführen sein kann.

Die angegebene Formel (1) beschreibt das funktionale Verhalten der Anzahl von Primzahlen der Form $k = 4n^2+1$ völlig zutreffend und ihr Grenzwert M strebt für $x \to \infty$ nach ∞ :

$$\lim_{x\to\infty} M = \lim_{x\to\infty} DA'\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}^2} = \frac{DA'}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}} = \infty.$$

Damit ist folgender Satz 3 bewiesen:

Satz 3. Die Anzahl der Primzahlen von den Formen $k = 4n^2+1$ und $k = n^2+1$ wächst für $n \to \infty$ über alle Schranken.

Literaturverzeichnis

[1]H. Scheid, Zahlentheorie, Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wiss.-Verl. 1991, Seite 371

[2]Ribenboim,The Book of prime number records, Springer, N.Y. 1988

[3]HW. Schmidt, Einige Sätze über Primzahlen und spezielle binomische Ausdrücke, https://arxiv.org/abs/1406.0397, Categories math.GM, revised version 2, 01.09.2015

Danksagung

Für die Systembetreuung meines PC und Unterstützung bei der Internetarbeit danke ich Christian Schmidt-Gütter.